

Module "Probabilités", (durée 1,5 h)

Partiel, 04.11.2024

Exercice 1 Questions courtes et indépendantes.

1. Un particulier souhaite compléter l'équipement électroménager de sa cuisine avec un four à micro ondes, un lave-vaisselle et un robot. Un magasin lui propose :

- 7 modèles de four à micro ondes, dont 3 de marque française.
- 4 modèles de lave-vaisselle, dont 1 de marque française.
- 7 modèles de robots, dont 4 de marque française.

- (a) Dénombrer les choix possibles d'équipement de ce particulier.

Il y a $7 \times 4 \times 7 = 196$ choix

- (b) Dénombrer les choix d'équipement tels que les trois éléments achetés soient de marque française, puis tels que au moins deux des trois éléments achetés soient de marque française.

• Nb de choix à 3 élt français = $3 \times 1 \times 4 = 12$ choix

• Nb de choix à au moins 2 élt français =

Nb de choix à exactement 2 élt français

+ Nb de choix à 3 élt français.

Or, on a :

Nb de choix à exactement 2 élt français =

Nb de choix à four et lave-vaisselle français et robot étranger

+ Nb de choix à four et robot français et lave-vaisselle étranger

+ Nb de choix à lave-vaisselle et robot français et four étranger

= $3 \times 1 \times 3 + 3 \times 3 \times 4 + 4 \times 1 \times 4 = 61$ choix .

Et finalement, Nb de choix à au moins 2 élt français = 73

2. Vous trouverez sous le tableau ci-dessous, une série de questions à choix multiples. Vous indiquerez la (ou les) bonne(s) réponse(s) par une croix dans la case correspondante. (Les réponses fausses seront pénalisées.)

Numéro de Question	Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
i)		✓	✓	
ii)	✓			
iii)			✓	✓
vi)	✓	✓		✓

- i) Le nombre de facons de choisir 3 personnes pour un projet, dans une entreprise comportant 15 employés, est :

a) 15×3 b) $\binom{15}{12}$ c) 455 d) 15^3

- ii) Si A et B sont deux événements indépendants, alors on a :
- a) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ c) A et B sont disjoints d) $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)$
- iii) On lance un dé équilibré. On gagne 1 euro si un nombre pair apparaît, rien sinon. Soit X le gain obtenu, on a alors :
- a) $X \sim \text{Bernoulli}(1/6)$ b) $\mathbb{E}(X) = 1/6$ c) $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$
d) $\text{Var}(X) = 0,25$
- iv) Soient X et Y deux variables ayant même loi. On a alors :
- a) $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$ b) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ c) $X = Y$ d) X et Y ont même fonction de répartition.
3. (a) Combien de mots à 7 lettres peut on former en utilisant exclusivement les lettres R et V ?

On peut former 2^7 mots

- (b) Un employé rencontre 7 feux sur son trajet domicile-travail. On suppose qu'un feu est soit vert, soit rouge. Combien y a t'il de configurations de trajets à 2 feux rouges ? Quelle est la probabilité qu'il ait 5 feux verts sur son trajet ?

- Il y a juste à choisir la position des 2 feux rouges sur les 7. On a

ainsi $\binom{7}{2} = 21$ possibilités .

-

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(5 \text{ feux verts}) &= \frac{\text{Nb de config à 5 feux verts}}{\text{Nb total de configurations}}, \\ &= \frac{\binom{7}{2}}{2^7}, \\ &= \frac{21}{2^7}. \end{aligned}$$

4. Lors d'une soirée organisée par un comité d'entreprise, les employés jouent au jeu suivant : une urne est remplie de 4 boules vertes et 6 boules jaunes. Chaque employé a le choix entre :
- piocher simultanément 2 boules,
 - piocher une boule dans l'urne, la remettre, puis piocher à nouveau une boule.

Un employé est dit "gagnant", si il obtient 2 boules vertes. Quelle est la meilleure stratégie ? Justifiez votre réponse.

On calcule dans les 2 cas la $\mathbb{P}(\text{obtenir 2 vertes})$

Cas 1 : Si l'on pioche simultanément 2 boules

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{obtenir 2 vertes}) &= \frac{\text{Nb d'ensembles (fabriqués avec les 10 boules) à 2 vertes}}{\text{Nb d'ensembles (fabriqués avec les 10 boules) à 2 éléments}}, \\
 &= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}, \\
 &= \frac{4 \times 3}{10 \times 9}, \\
 &= \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

Cas 2 : Si l'on pioche une boule, qu'on remet dans l'urne et l'on re pioche

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{obtenir 2 vertes}) &= \mathbb{P}(\text{obtenir 1 verte au tirage 1 et obtenir 1 verte au tirage 2}), \\
 &= \mathbb{P}(\text{obtenir 1 verte au tirage 1}) \times \mathbb{P}(\text{obtenir 1 verte au tirage 2}), \quad \text{par indép} \\
 &= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10}, \\
 &= \frac{4}{25}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, la comparaison des probabilités de chaque cas nous dit que :
la deuxième stratégie est plus avantageuse.

Exercice 2 Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un lecteur dvd. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6. La probabilité pour qu'il achète un lecteur dvd quand il a acheté un téléviseur est de 0,4. La probabilité pour qu'il achète un lecteur dvd quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un lecteur dvd ?
 Avec les notations naturelles, on a : $\mathbb{P}(Tv \cap Dvd) = \mathbb{P}(Dvd|Tv)\mathbb{P}(Tv) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$.
2. Quelle est la probabilité pour qu'il achète un lecteur dvd ? A l'aide de la formule des probas totales appliquée à la partition $\{Tv, \bar{Tv}\}$, on a :
 $\mathbb{P}(Dvd) = \mathbb{P}(Dvd|Tv)\mathbb{P}(Tv) + \mathbb{P}(Dvd|\bar{Tv})\mathbb{P}(\bar{Tv}) = 0,4 \times 0,6 + 0,2 \times 0,4 = 0,32$.
3. Le client achète un lecteur dvd. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?
 On a : $\mathbb{P}(Tv|Dvd) = \frac{\mathbb{P}(Tv)}{\mathbb{P}(Dvd)} \times \mathbb{P}(Dvd|Tv) = \frac{0,6}{0,32} \times 0,4 = 0,75$.

Exercice 3 Soit un dé équilibré. On lance le dé une fois et on note X le numéro de la face obtenue. Soit $U = X^2$ et $V = 3X - 5$

1. Est ce que X, U et V sont des variables aléatoires ? Précisez les ensembles d'arrivée de ces 3 variables.
 Ces 3 variables sont bien des variables aléatoires. et on a : $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $U(\Omega) = \{1; 4; 9; 16; 25; 36\}$ et $V(\Omega) = \{-2; 1; 4; 7; 10; 13\}$

2. Donnez les lois de X , U et V

On peut présenter les lois de ces v.a sous la forme de tableau.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

k	1	4	9	16	25	36
$\mathbb{P}(U = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

k	-2	1	4	7	10	13
$\mathbb{P}(V = k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{var}(X)$.

On a : $\mathbb{E}(X) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k) = \frac{7}{2}$. Et, $\text{var}(X) = \sum_k k^2\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - (\frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12}$

4. En deduire $\mathbb{E}(V)$ et $\text{var}(V)$ et $\mathbb{E}(U)$ par un minimum de calculs.

Par **linéarité** de l'espérance, on a $\mathbb{E}(V) = 3\mathbb{E}(X) - 5 = \frac{11}{2}$.

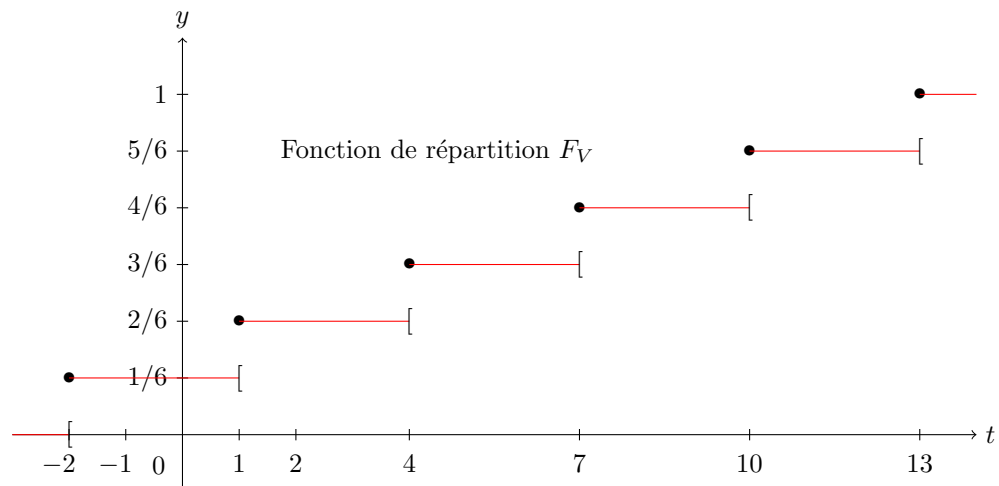
Et par **pseudo linéarité** de la variance, on a $\text{var}(V) = 3^2\text{var}(X) = 9 \times \frac{35}{12} = \frac{105}{4}$

Enfin, $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X^2) = \text{var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{182}{12} = \frac{91}{6}$

5. Définir puis tracer la fonction de répartition de V .

Par définition, la fonction de répartition de V est la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$, par $F_V(t) = \mathbb{P}(V \leq t)$. Ce qui donne ici :

$$F_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ 1/6 & \text{si } t < 1 \\ 1/3 & \text{si } t < 4 \\ 1/2 & \text{si } t < 7 \\ 2/3 & \text{si } t < 10 \\ 5/6 & \text{si } t < 13 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



Nike
a peut-être créé son slogan en pensant à vous lors
de ce partiel :

JUST DO IT.

